PART2　3 次方程式の実数解の個数

例題

次の 3 次方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

(1)　$2x^3-6x+1=0$　　(2)　$x^3+4x^2+6x+2=0$

Point Pickup

練習

次の3次方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

(1)　$2x^3+3x^2+2=0$　　(2)　$x^3+3x^2-4=0$

第 16 講　PART2 確認問題

次の 3 次方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

1　$2x^3+6x^2+3=0$

ア 個

2　$x^3-3x+2=0$

イ 個

PART2　３次方程式の実数解の個数

例題

次の３次方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

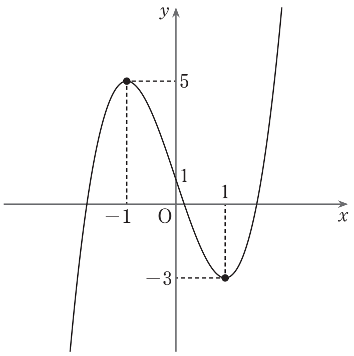
(1)　$2x^3-6x+1=0$　　(2)　$x^3+4x^2+6x+2=0$

(1)　$f(x)=2x^3-6x+1$ とおくと

$$f'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$$

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	5	↘	-3	↗

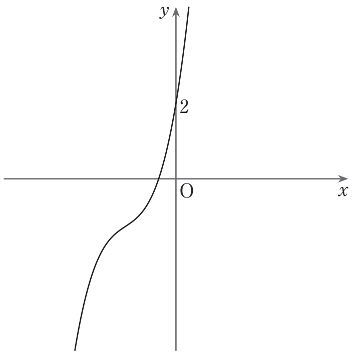


したがって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになり，グラフと x 軸の共有点の個数は３個である。

ゆえに，方程式 $2x^3-6x+1=0$ の異なる実数解の個数は３個である。

(2)　$f(x)=x^3+4x^2+6x+2$ とおくと

$$f'(x)=3x^2+8x+6=3\left(x+\frac{4}{3}\right)^2+\frac{2}{3}>0$$



よって，常に $f'(x)>0$ より，$f(x)$ は単調に増加する。

したがって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになり，グラフと x 軸の共有点の個数は１個である。

ゆえに，方程式 $x^3+4x^2+6x+2=0$ の異なる実数解の個数は１個である。

練習

次の 3 次方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

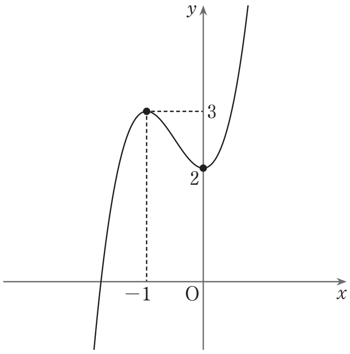
(1)　$2x^3+3x^2+2=0$　　(2)　$x^3+3x^2-4=0$

(1)　$f(x)=2x^3+3x^2+2$ とおくと

$$f'(x)=6x^2+6x=6x(x+1)$$

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	2	↗



したがって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになり，

グラフと x 軸の共有点の個数は 1 個である。

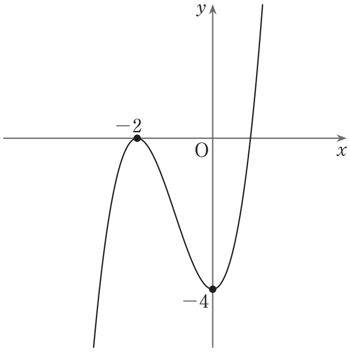
ゆえに，方程式 $2x^3+3x^2+2=0$ の異なる実数解の個数は 1 個である。

(2)　$f(x)=x^3+3x^2-4$ とおくと

$$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$$

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	-4	↗



したがって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになり，

グラフと x 軸の共有点の個数は 2 個である。

ゆえに，方程式 $x^3+3x^2-4=0$ の異なる実数解の個数は 2 個である。

第16講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：1

[解説]

$f(x)=2x^3+6x^2+3$ とおくと

$$f'(x)=6x^2+12x=6x(x+2)$$

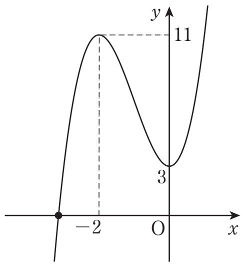
よって，$f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	11	↘	3	↗

したがって，$y=f(x)$ のグラフは下図のようになり，

グラフと x 軸の共有点は 1 個である。

ゆえに，方程式 $2x^3+6x^2+3=0$ の異なる実数解の個数は **1 個**である。 [A]



[A]　3 次方程式 $f(x)=0$ の実数解の個数
$\iff$ 3 次関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の個数

2 **[正解]** イ：2

[解説]

$f(x)=x^3-3x+2$ とおくと

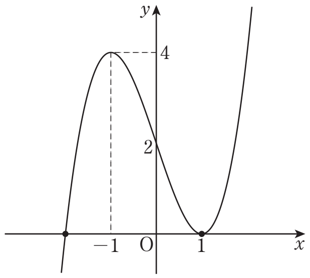
$$f'(x)=3x^2-3$$
$$=3(x+1)(x-1)$$

よって，$f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

したがって，$y=f(x)$ のグラフは下図のようになり，グラフと x 軸の共有点の個数は 2 個である。

ゆえに，方程式 $x^3-3x+2=0$ の異なる実数解の個数は **2 個**である。 [B]



[B]　3 次方程式 $f(x)=0$ の実数解の個数
$\Longleftrightarrow$ 3 次関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の個数